

Структура чисел

Е. А. Рубцов, email: rea@inistek.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра 319

***Аннотация.** Работа посвящена описанию структуры различных видов чисел при помощи унифицированного языка описания структур.*

***Ключевые слова:** модели данных, языки описания данных, структуры, числа, структура чисел, унифицированный язык описания структур.*

Введение

Данная работа является продолжение серии работ связанных с разработкой унифицированного подхода к описанию структур различных объектов [2, 8]. В поисках такого подхода был разработан унифицированный язык описания структур, который был использован для описания структуры текстовых данных [2], структуры времени, структуры различных моделей данных [2-7], структуры некоторых математических объектов [8]. Данная работа посвящена использованию унифицированного языка для описания структуры чисел.

1. Унифицированный язык описания структур

При помощи языка можно описывать структуру различных объектов. Структура описывается при помощи формулы следующим образом:

1. Выявляется атомарный элемент, который будет рассматриваться как неделимый, т.е. не имеющей своей внутренней структуры. Записывается символ «а».

2. Выявляется группа (множество или список), содержащая атомарные элементы. Справа от символа «а» записывается символ «м», если группа представляет собой множество, или символ «с», если группа представляет собой список.

3. Если есть возможность, выявляется группа (множество или список), содержащая группы, каждая из которых имеет структуру, выявленную на предыдущем шаге. Справа от формулы, полученной на предыдущем шаге, записывается символ «м» или «с» соответственно.

4. Предыдущий шаг повторяется необходимое количество раз.

5. Если полученную структуру нужно представить в виде атомарного элемента для описания структуры верхнего уровня, то справа от полученной формулы записывается символ «а». Если для описания структуры верхнего уровня нужно использовать атомарные элементы полученной структуры, но с учетом их расположения в этой структуре, то справа от полученной формулы записывается символ «э». Далее осуществляется переход к шагу 2.

Записанная на каждом шаге формула (начиная с формулы атомарного элемента и заканчивая итоговой формулой) описывает элемент итоговой структуры.

Примеры формул: «ам», «ас», «амм», «амс», «амсм» и т.д.

После каждого символа в качестве нижнего индекса можно указать число, обозначающее:

- для атомарных элементов – количество возможных различных атомарных элементов;
- для множества – мощность множества;
- для списка – длину списка.

Идущие подряд несколько одинаковых символов можно заменить на один символ, указав после символа в качестве верхнего индекса количество повторов.

Для обозначения множества всех возможных элементов используется символ «М». Например, «аМ» – множество всех атомарных элементов, «амМ» – множество всех возможных множеств, содержащих атомарные элементы.

Для обозначения списка, в котором нет повторяющихся элементов, используется символ «С».

В таблице 1 представлены отличия между множеством и списком.

Таблица 1

Отличия между множеством и списком

| Множество | Список |
|--|---|
| Все элементы уникальны. | Элементы могут повторяться. |
| Элементы неупорядочены. | Элементы упорядочены. |
| Размер определяется мощностью множества. | Размер определяется длиной списка. |
| Максимальный размер не ограничен. | Максимальный размер равен мощности множества натуральных чисел. |

Описание структуры, с учетом смысловой нагрузки каждого элемента, выполняется при помощи специальной таблицы, пример которой приведен на рис. 1.

| РЕЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДАННЫХ | | | | | | | | | | |
|---------------------------|---------------------|---|---|---|--|--|--|--|--|--|
| 4 | а | м | с | м | | | | | | |
| а | значение | | | | | | | | | |
| м | домен | | | | | | | | | |
| с | отношение | | | | | | | | | |
| м | множество отношений | | | | | | | | | |

Рис. 1. Описание структуры реляционной модели данных

В начале таблицы представлено название объекта, структура которого описывается: «реляционная модель данных». Далее следует строка, содержащая длину формулы и сама формула: «4», «амсм». Далее для каждого элемента структуры идет описание его смысловой нагрузки: «а» – значение, «ам» – домен, «амс» – отношение, «амсм» – множество отношений. Для краткости в каждой строке указывается только последний символ формулы, описывающей данный элемент. В итоге получаем ту же самую формулу, что и во второй строке, но написанную вертикально. Читая формулу сверху вниз можно воспроизвести процесс синтеза структуры. Читая формулу снизу вверх можно воспроизвести процесс анализа структуры.

| СТИХОТВОРЕНИЕ | | | | | | | | | | |
|---------------|---------------|---|---|---|---|--|--|--|--|--|
| 5 | а | с | с | с | с | | | | | |
| а | буква | | | | | | | | | |
| с | слово | | | | | | | | | |
| с | стих | | | | | | | | | |
| с | строфа | | | | | | | | | |
| с | стихотворение | | | | | | | | | |

Рис. 2. Описание структуры стихотворения

На рис. 2 в качестве еще одного примера приведено описание структуры стихотворения. В начале идет название объекта: «стихотворение». Далее формула, с указанием ее длины: «5», «асссс». Далее описание смысловой нагрузки каждого элемента структуры: «а» – буква, «ас» – слово, «асс» – стих, «ассс» – строфа, «асссс» – стихотворение. Читая формулу сверху вниз получаем процесс синтеза структуры: из букв собирается слово, из слов собирается стих, из стихов

собирается строфа, из строф собирается стихотворение. Читая формулу снизу вверх получаем процесс анализа структуры: стихотворение разбивается на строфы, строфы разбиваются на стихи, стихи разбиваются на слова, слова разбиваются на буквы.

Далее будут рассмотрены некоторые результаты применения унифицированного языка для описания структуры чисел.

2. Цифры

Возьмем n различных символов обозначающих цифры, где n – основание системы счисления. Для задания порядка цифр создадим список длины n , в котором все элементы будут уникальны. Формула данного списка представлена на рис. 3.

$$a_n C_n$$

Рис. 3. Порядок цифр

Для обозначения цифры с учетом ее порядка в списке цифр будем использовать атомарный элемент, рассматриваемый с учетом его положения в структуре, отображенной на рис. 3. Формула такого элемента показана на рис. 4.

$$a_n C_n \text{э}$$

Рис. 4. Цифра

В дальнейшем при помощи символа «а» будем обозначать цифру с учетом ее порядка в списке цифр. При помощи символа «о» будем обозначать первый элемент в этом списке.

3. Базовое множество

В качестве атомарных элементов будем рассматривать цифры, как элементы списка, заданного при помощи структуры, отображенной на рисунке 3. Базовым множеством будем называть множество всех возможных бесконечных списков атомарных элементов. Формула базового множества представлена на рис. 5.

$$a_n c_{\infty} M$$

Рис. 5. Базовое множество

Для обозначения списка, содержащего в себе только один определенный элемент, будем указывать в качестве нижнего индекса

(перед длиной списка) обозначение этого элемента в круглых скобках (см. рис. 6).

$$C_{(*)}n$$

Рис. 6. Список длины n, содержащий только элемент *

Для обозначения списка, в конце которого указан определенный элемент, будем указывать в качестве нижнего индекса (перед длиной списка) обозначение этого элемента, после которого будет идти круглая закрывающая скобка (см. рис. 7). Если в качестве длины списка указана бесконечность, то будем считать, что список заканчивается бесконечным повтором данного элемента.

$$C_{*})n$$

Рис. 7. Список длины n, заканчивающийся элементом *

Для обозначения списка, в конце которого не указан определенный элемент, будем указывать в качестве нижнего индекса (перед длиной списка) символ отрицания «¬», далее обозначение элемента, после которого будет идти круглая закрывающая скобка (см. рис. 8). Если в качестве длины списка указана бесконечность, то будем считать, что список не заканчивается бесконечным повтором данного элемента.

$$C_{\neg *})n$$

Рис. 8. Список длины n, который не заканчивается элементом *

Базовое множество можно представить в виде пересечения трех непересекающихся подмножеств (см. рис. 9). Вертикальная запись означает, что элемент структуры может быть представлен несколькими разными формулами. Символ «M» означает множество всех возможных элементов, соответствующих одной из формул, записанных слева.

$$a_n C_{\infty} M = a_n \begin{matrix} C_{(o)} \infty \\ C_{\neg o)} \infty \end{matrix} M$$

Рис. 9. Подмножества базового множества

Первое подмножество содержит один единственный элемент, представляющий собой бесконечный список, содержащий в каждой своей позиции элемент «о». Второе подмножество содержит в себе все бесконечные списки, которые заканчиваются бесконечным повтором элемента «о» и которые содержат в себе хотя бы один элемент, отличный от элемента «о». Третье подмножество содержит в себе все бесконечные списки, которые не заканчиваются бесконечным повтором элемента «о». Любой элемент базового множества принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Элемент из первого подмножества можно трактовать как число «ноль». Второе подмножество можно отобразить в множество натуральных чисел следующим образом (в примере в качестве символов, обозначающих цифры, выбраны обычные арабские цифры от 0 до 9): списку (0, 3, 0, 0, 0, ...) сопоставим число 30, списку (1, 0, 2, 3, 0, 0, 0, ...) сопоставим число 3201 и т.д. Третье подмножество можно отобразить в множество всех вещественных чисел в интервале (0, 1]. Данное отображение можно выполнить превращением списка вида (1, 2, 3, 4, ...) в число 0.1234.... При этом вещественным числам, заканчивающимся нулем в периоде сопоставляются списки, заканчивающиеся бесконечным повтором цифры 9. Т.е. для вещественных чисел, заканчивающихся нулем в периоде, используются их идентичные формы записи, заканчивающиеся девяткой в периоде: 0.123(9) вместо 0.124(0). Т.е. число 0.124 будет представлено списком (1, 2, 3, 9, 9, 9, ...). Единице будет соответствовать бесконечный список, состоящий только из девяток: (9, 9, 9, ...).

В дальнейшем три подмножества базового множества будем обозначать буквами O, N, R соответственно.

4. Вещественные числа

Положительное вещественное число большее единицы можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству N (целая часть числа), а второй элемент – подмножеству R (дробная часть числа). Например, число π будет представлено следующим образом: ((3, 0, 0, 0, ...), (1, 4, 1, 5, 9, ...)). Число 13 будет представлено следующим образом: ((2, 1, 0, 0, ...), (9, 9, 9, 9, 9, ...)). Положительное вещественное число большее нуля и меньшее или равное единице можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству O (целая часть числа, выраженная нулем), а второй элемент – подмножеству R (дробная часть числа). Число 0.5 будет представлено следующим образом: ((0, 0, 0, ...), (4, 9, 9, 9, ...)). Число 1 будет представлено следующим образом: ((0, 0, 0, ...), (9, 9, 9, 9, ...)). Число

ноль можно представить в виде списка из двух элементов, в котором оба элемента принадлежат подмножеству O : $((0, 0, 0, \dots), (0, 0, 0, \dots))$. Отрицательное вещественное число меньше нуля, но большее или равное минус единице можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству R (дробная часть числа), а второй элемент – подмножеству O (целая часть числа, выраженная нулем). Число минус 0.5 будет представлено следующим образом: $((4, 9, 9, 9, \dots), (0, 0, 0, \dots))$. Число минус 1 будет представлено следующим образом: $((9, 9, 9, 9, \dots), (0, 0, 0, \dots))$. Отрицательное вещественное число меньше минус единицы можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству R (дробная часть числа), а второй элемент – подмножеству N (целая часть числа). Например, число минус π будет представлено следующим образом: $((1, 4, 1, 5, 9, \dots), (3, 0, 0, 0, \dots))$. Число минус 13 будет представлено следующим образом: $((9, 9, 9, 9, 9, \dots), (2, 1, 0, 0, \dots))$. Полное множество вещественных чисел может быть представлено формулой, изображенной на рис. 10.

$$\begin{array}{c}
 (C_{\emptyset})_{\infty}, (C_{\neg\emptyset})_{\infty} \\
 (C_{(0)})_{\infty}, (C_{\neg(0)})_{\infty} \\
 a_n (C_{(0)})_{\infty}, (C_{(0)})_{\infty} \quad M \\
 (C_{\neg(0)})_{\infty}, (C_{(0)})_{\infty} \\
 (C_{\neg(0)})_{\infty}, (C_{\emptyset})_{\infty}
 \end{array}$$

Рис. 10. Множество вещественных чисел

5. Целые числа

Положительное целое число можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству N (целая часть числа), а второй элемент – подмножеству O (дробная часть числа, выраженная нулем). Например, число 21 будет представлено следующим образом: $((1, 2, 0, 0, 0, \dots), (0, 0, 0, \dots))$. Число ноль можно представить в виде списка из двух элементов, в котором оба элемента принадлежат подмножеству O : $((0, 0, 0, \dots), (0, 0, 0, \dots))$. Отрицательное целое число можно представить в виде списка из двух элементов, в котором первый элемент принадлежит подмножеству O

(дробная часть числа, выраженная нулем), а второй элемент – подмножеству \mathbb{N} (целая часть числа). Например, число минус 21 будет представлено следующим образом: $((0, 0, 0, \dots), (1, 2, 0, 0, 0, \dots))$. Полное множество целых чисел может быть представлено формулой, изображенной на рис. 11.

$$a_n \left(\begin{array}{l} (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) \\ (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) \\ (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) \end{array} \right) M$$

Рис. 11. Множество целых чисел

Множество натуральных чисел может быть представлено так же как и множество всех положительных целых чисел (см. рис. 12).

$$a_n (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) M$$

Рис. 12. Множество натуральных чисел

6. Рациональные числа

Любое рациональное число можно представить в виде дроби, у которой числитель принадлежит целым числам, а знаменатель – натуральным. Одно и то же рациональное число может быть записано разными, но эквивалентными рациональными дробями [1]. В рамках унифицированного языка описания структур рациональную дробь можно представить в виде списка из двух элементов, первый из которых является списком из двух элементов, описывающим целое число, а второй – списком из двух элементов, описывающим натуральное число. Множество всех рациональных дробей может быть представлено формулой, изображенной на рис. 13.

$$a_n \left(\begin{array}{l} (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) \\ ((c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}), (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty})) \\ (c_{(0)\infty}, c_{(0)\infty}) \end{array} \right) M$$

Рис. 13. Множество рациональных дробей

7. Комплексные числа

Комплексное число – число вида $a + bi$, где a, b – вещественные числа, i – мнимая единица. Комплексное число можно представить в виде списка из двух элементов, каждый из которых является списком, описывающим вещественное число. Множество всех комплексных чисел может быть представлено формулой, изображенной на рис. 14.

$$a_n \left(\begin{matrix} (c_0)_\infty, (c_{\neg 0})_\infty \\ (c_{(0)})_\infty, (c_{\neg 0})_\infty \\ (c_{(0)})_\infty, (c_{(0)})_\infty \\ (c_{\neg 0})_\infty, (c_{(0)})_\infty \\ (c_{\neg 0})_\infty, (c_{(0)})_\infty \end{matrix}, \begin{matrix} (c_0)_\infty, (c_{\neg 0})_\infty \\ (c_{(0)})_\infty, (c_{\neg 0})_\infty \\ (c_{(0)})_\infty, (c_{(0)})_\infty \\ (c_{\neg 0})_\infty, (c_{(0)})_\infty \\ (c_{\neg 0})_\infty, (c_{(0)})_\infty \end{matrix} \right) M$$

Рис. 14. Множество комплексных чисел

8. Общая формула структуры чисел

На рисунке 15 представлена общая формула, описывающая структуру чисел. При $k = 0$ получаем формулу базового множества. При $k = 1$ получаем общую формулу натуральных, целых и вещественных чисел. При $k = 2$ получаем общую формулу рациональных дробей и комплексных чисел. Число n – основание системы счисления.

$$a_n c_\infty (c_2)^k M$$

$n \in \{2, 3, 4, \dots\}$
 $k \in \{0, 1, 2\}$

Рис. 15. Общая формула структуры чисел

С учетом порядка цифр формула будет выглядеть так, как показано на рисунке 16.

$$a_n c_n \varepsilon_n c_\infty (c_2)^k M$$

$n \in \{2, 3, 4, \dots\}$
 $k \in \{0, 1, 2\}$

Рис. 16. Общая формула структуры чисел с учетом порядка цифр

Заключение

При помощи унифицированного языка описания структур было выполнено описание структуры натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Была выведена общая формула структуры чисел.

Список литературы

1. Математическая энциклопедия [Электронный ресурс] : словари и энциклопедии – Режим доступа: http://endic.ru/enc_math/ .
2. Рубцов, Е.А. Унифицированный язык описания структур / Е. А. Рубцов // Материалы XX междунар. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии» (IPMT-2020), (Воронеж, 13-14 февраля 2020 г.). – Воронеж, 2020. – С. 1283-1291.
3. Bachman, C.W. Data structure diagrams / C.W. Bachman // ACM SIGMIS Database: the DATABASE for Advances in Information Systems. – Summer 1969. – Volume 1, Issue 2. – pp 4-10.
4. Codd, E.F. A relational model of data for large shared data banks / E.F. Codd // Communications of the ACM. – June 1970. – Volume 13, Issue 7. – pp 377–387.
5. Senko, M.E. Data structures and accessing in data-base systems. / M.E. Senko, E.B. Altman, M.M. Astrahan, P.L. Fehder // IBM Systems Journal. – March 1973. – Volume 12, Issue 1 – pp 30-93.
6. Chen, P. P. The Entity-Relationship Model – Toward A Unified View of Data / P. P. Chen // Papers from the international conference on very large databases, Volume 1 Issue 1 (Framingham, 22–24 September 1975). – Framingham, 1975. – pp 9-36.
7. Codd, E.F. Providing OLAP (on-line analytical processing) to user-analysts: an IT mandate / E.F. Codd, S.B.Codd, C.T. Salley; Codd & Date, Inc, 1993. – 26 p.
8. Рубцов, Е.А. Описание структуры математических объектов / Е. А. Рубцов // Материалы XXI междунар. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии» (IPMT-2021), (Воронеж, 11-12 февраля 2021 г.). – Воронеж, 2021. – С. 1022-1029.